(8)

Isenmann - Pecatte, p 335

Optimisation dans un Hilbert

Théorème Soient H un espace de Hilbert et $J : H \longrightarrow \mathbb{R}$ fonction convexe continue et coercive.
Alors, il existe $a \in H$ tel que $J(a) = \inf_H J$.

▷ Étape 1 :

Soit $(x_n)_n$ une suite de H telle que $(J(x_n))_n$ converge vers $\inf_H J$.
Supposons par l'absurde que $(x_n)_n$ n'est pas bornée.
Il existe alors une sous-suite $(x_{n_k})_k$ telle que $\|x_{n_k}\| \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$.
Mais alors par coercivité de J, $J(x_{n_k})$ diverge vers $+\infty$. Ce qui est absurde.
Il existe alors $c > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\| \leqslant c$.

▷ Étape 2 : extraction diagonale

On considère la suite $(u_n)_n = (\langle x_0, x_n \rangle)_n$.
D'après le théorème de Cauchy - Schwarz, en utilisant l'étape 1, on obtient que $(u_n)_n$ est bornée. → $|u_n| \leqslant \|x_0\|\|x_n\| \leqslant \|x_0\| c$
Par le théorème de Bolzano - Weierstrass, on en déduit qu'il existe φ_0 une extraction telle que la suite $(u_{\varphi_0(n)})_n$ converge.

Par récurrence, supposons avoir construit $\varphi_0, \dots, \varphi_i$ des extractions telles que $(\langle x_i, x_{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_i(n)} \rangle)_n$ converge.
Comme précédemment, la suite $(\langle x_{i+1}, x_{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_i(n)} \rangle)_n$ est bornée et on peut donc appliquer le théorème de Bolzano-Weierstrass. Il existe une extraction φ_{i+1} telle que $(\langle x_{i+1}, x_{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_{i+1}(n)} \rangle)_n$ converge.
On obtient ainsi une suite d'extractions $(\varphi_i)_i$.

On définit $\psi : n \in \mathbb{N} \longmapsto \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_n(n)$.
On obtient alors que $(\langle x_i, x_{\psi(n)} \rangle)_n$ converge pour tout i. → sous-suite de la suite $(\langle x_i, x_{\varphi_0 \circ \dots \varphi_i(n)} \rangle)_n$
Alors pour tout $x \in F = \mathrm{Vect}(x_n, n \in \mathbb{N})$, la suite $(\langle x, x_{\psi(n)} \rangle)_n$ converge.

▷ Étape 3 : conv de $\langle \cdot, x_{\psi(n)} \rangle$ sur H

On définit la suite $(y_n)_n = (x_{\psi(n)})_n$.
Comme H est un espace de Hilbert, alors $H = \overline{F} \oplus F^\perp$.
Soient $u \in H$ et $\varepsilon > 0$.
On a alors :

$\exists (v, w) \in \overline{F} \times F^\perp,\ u = v + w$ $\quad$ $\exists \tilde{v} \in F,\ \|v - \tilde{v}\| \leqslant \varepsilon$ $\quad$ cv $\Rightarrow$ Cauchy $\quad$ $\exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geqslant N, |\langle \tilde{v}, y_p - y_q \rangle| \leqslant \varepsilon$

On obtient donc pour tous $p, q \geqslant N$,

$$\begin{aligned} |\langle u, y_p - y_q \rangle| &= |\langle v, y_p - y_q \rangle| \\ &\leqslant \|v - \tilde{v}\| \|y_p - y_q\| + |\langle \tilde{v}, y_p - y_q \rangle| \\ &\leqslant (2c + 1)\varepsilon \end{aligned}$$

Donc la suite $(\langle u, y_n \rangle)_n$ étant de Cauchy dans $\mathbb{R}$ complet, elle est convergente. Notons ℓ_u cette limite.
L'application $f : u \in H \longmapsto \ell_u$ est une forme linéaire continue. → forme OK, linéarité : linéarité $\langle \cdot, \cdot \rangle$ + unicité limite, continuité : $|f(u)| \leqslant c \|u\|$
En appliquant le théorème de Riesz, on en déduit qu'il existe $a \in H$ tel que $f = \langle \cdot, a \rangle$.

▷ Étape 4 :

Pour $\beta > \inf_H J$, on définit $C_\beta := \{x \mid J(x) \leqslant \beta\}$ qui est un convexe fermé non vide de H. Alors la distance de C_β à un point $x \in H$ est toujours atteinte en un unique point.
Comme $(J(x_n))_n$ converge vers $\inf_H J$ alors $(J(y_n))_n$ aussi. Alors :
il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant N$, $J(y_n) \in C_\beta$.
En utilisant le théorème de projection sur un convexe fermé,
$\forall n \geqslant N$, $\underbrace{\langle y_n - p(a), a - p(a) \rangle}_{\leqslant 0}$ où $p : H \longrightarrow C_\beta$ est l'application projection sur C_β
En passant à la limite,
$\langle a - p(a), a - p(a) \rangle = \|a - p(a)\|^2 \leqslant 0$ i.e. $a = p(a)$
On obtient donc $a \in C_\beta$, donc pour tout $\beta \in \mathbb{R}$ vérifiant $\beta > \inf_H J$, $J(a) \leqslant \beta$.
Alors :
$J(a) = \inf_H J$.